



Prova d'accés a la Universitat (2010)

Matemàtiques II

Model 1

Contesta de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. Determinau, segons els valors de m , el rang de la matriu real $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(7 punts). En el cas $m = 1$, calculau les solucions del sistema homogeni $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3 punts).

2. Calculau el valor de k per al qual les rectes següents són paral·leles (3 punts).

$$\frac{x-1}{k} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{k}, \quad \frac{x+1}{2k} = \frac{y}{k+3} = \frac{z-2}{2}$$

Calculau, en aquest cas, la distància entre les rectes (7 punts).

3. Calculau el punt de la corba $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el qual el pendent de la recta tangent sigui màxim (6 punts). Feu un dibuix on apareguin la corba, el punt i la recta tangent (4 punts).

4. Calculau l'àrea de la regió limitada per la hipèrbola $xy = 4$ i la recta que la talla en els punts d'abscisses $x = 1$, $x = 4$ (7 punts). Feu un dibuix de la regió (3 punts).

Opció B

1. Es consideren les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculau la matriu X

que verifica: $XA + I = B$, on I representa la matriu identitat.

2. Siguin $P = (a_1, b_1, c_1)$ i $Q = (a_2, b_2, c_2)$ dos punts del pla $Ax + By + Cz + D = 0$. Demostrau que el vector \overrightarrow{PQ} és perpendicular al vector $\vec{n} = (A, B, C)$ (4 punts). Aplicau-ho per calcular l'equació general del pla que conté els punts $P = (1, 2, 3)$, $Q = (-1, 0, 2)$ i $R = (1, 1, 1)$ (6 punts).

3. Es considera la funció $f(x) = x|x|$. Calculau les equacions i els dominis de les funcions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ i $f'''(x)$ (6 punts). Representau-les gràficament (4 punts).

4. Sigui $A(t)$, $t > 0$, l'àrea de la regió limitada per la corba $y = \sqrt[3]{x^2}$ i les rectes $y = 0$, $x = t$. Representau gràficament aquesta regió (4 punts) i calculau el valor de t per al qual $A(t) = 1$ (6 punts).